Durée : 4 heures

Le problème a pour but de mettre en évidence quelques propriétés d'une fonction J définie par une intégrale généralisée.

PREMIÈRE PARTIE

On considère la fonction numérique J de la variable réelle x définie par : $J(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+1} \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

1° Montrer que J (x) est définie pour tout x réel et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R} \quad |J(x)| \leqslant 1$

2° Montrer l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall x_0 \in \mathbb{R},\ \forall t \geqslant 0 \quad |\cos xt - \cos x_0 t| \leqslant |x - x_0|\, t$

En déduire que J est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

3° Montrer l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall x_0 \in \mathbb{R},\ \forall t \geqslant 0 \quad |\cos xt - \cos x_0 t + (x - x_0)\, t \sin x_0 t| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2} t^2$$

En déduire que J est dérivable et que sa dérivée est donnée par :

$$J'(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{+1} \frac{t \sin xt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

4° De manière similaire, montrer que J est 2 fois dérivable et donner l'expression de la dérivée seconde sous la forme d'une intégrale.

5° Montrer que J est solution de l'équation différentielle :

(E) $$x y'' + y' + x y = 0$$

6° *a.* Montrer que J est indéfiniment dérivable et donner l'expression de sa dérivée $n^{ième}$ sous la forme d'une intégrale.

b. En déduire que J est développable en série entière sur la totalité de $\mathbb{R}$. Pour cela on commencera par développer J en utilisant la formule de Mac Laurin avec reste de Lagrange.

7° *a.* Déterminer toutes les solutions de E qui sont sommes de séries entières. Quelles sont les rayons de convergence de ces séries ?

b. En déduire, pour tout entier p positif, la valeur de l'intégrale $\int_0^{+1} \frac{t^{2p}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

8° *a.* Montrer que $\lim_{x \to +\infty} J'(x) = 0$. On pourra scinder en deux l'intégrale définissant J' et montrer que chaque morceau peut être rendu arbitrairement petit pour x assez grand.

b. Montrer que $\lim_{x \to 0} \frac{J'(x)}{x}$ existe.

c. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{J'(x)}{x}\,dx$. On pourra utiliser le résultat suivant : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}$ et on admettra que l'on peut permuter les intégrations sur les intervalles $[0, 1[$ et $[0, \infty[$.

d. En utilisant l'équation E et les résultats précédents, déterminer la valeur de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} J(x)\,dx$

DEUXIÈME PARTIE

On fait dans l'équation (E) le changement de fonction inconnue :

$$y(x) = \frac{u(x)}{\sqrt{x}} \qquad x > 0$$

1° Donner l'équation différentielle vérifiée par la fonction u.

2° Soit l'équation différentielle :

(*e*) $$y'' + y = 0$$

Donner toutes les solutions de (*e*).

3° *a.* On note u la fonction définie par $u(x) = \sqrt{x}\,J(x)$ et v une solution de (*e*). Montrer que, si α et β sont deux réels strictement positifs avec $\beta > \alpha$, on a :

$$(u'v - uv')(\beta) - (u'v - uv')(\alpha) + \frac{1}{4}\int_\alpha^{+\beta} \frac{u.v}{x^2}\,dx = 0$$

b. Déduire de ce résultat que si α et β sont deux zéros consécutifs de v, u s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]\alpha, \beta[$.

c. En déduire que J possède un zéro dans tout intervalle du type $]a, a + \pi[$ quel que soit le réel positif a.

4° *a.* λ étant un réel quelconque, former l'équation différentielle vérifiée par la fonction :

$$w_\lambda(x) = J(\lambda x)$$

b. Montrer que, si λ et μ sont distincts, on a :

$$\frac{d}{dx}\left[x\left(w'_\lambda w_\mu - w_\lambda w'_\mu\right)\right] + (\lambda^2 - \mu^2)\, x\, w_\lambda w_\mu = 0$$

c. Montrer que, si λ et μ sont des zéros distincts de J, on a :

$$\int_0^{+1} x\, J(\lambda x)\, J(\mu x)\,dx = 0$$

page 58 1986 E.n.s.e.t. Section A3.Mathematiques